复变函数讨论题目

黄泽熙

英才实验学院

2015 年 10 月 28 日

讨论题目一：解析函数的等价命题

问题

设$D\subset\mathbb{C}$是区域，$f(z)$是定义在D上的函数，且$f(z)\in C(\partial D)$.试确定以下命题之间的关系，并对确定的关系进行证明.

1. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\in A(D)$;
2. $u(x,y)$,$v(x,y)$在D内可微，且满足Cauchy-Rieamann方程;
3. 在D内有
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$
其中$\forall z\in D,\xi\in\partial D$.
4. $f(z)$在D内任意一点都有幂级数表示形式.

小引理

证明

先证明一个小引理：若 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho_1 = 0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho_2 = 0$，则

$$\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0} \frac{\rho_1 \Delta x + \rho_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

事实上，注意到

$$\left|\frac{\rho_1 \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leqslant \rho_1, \left|\frac{\rho_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leqslant \rho_2$$

由夹逼定理即证.

命题1推出命题2

证明

命题1⇒命题2：

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z=x+iy$处可导，则对于$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)+\rho(\Delta z)$$

其中$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$.

令$\Delta f=\Delta u+i\Delta v$，$f'(z)=a+ib$，$\rho(\Delta z)=\rho_1+i\rho_2$，则有

$$\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x+i\Delta y)$$

$$=(a\Delta x-b\Delta y+\rho_1\Delta x-\rho_2\Delta y)+i(a\Delta y+b\Delta x+\rho_1\Delta y+\rho_2\Delta x)$$

命题1推出命题2

证明

对比实虚部有

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1 \Delta x - \rho_2 \Delta y$$

$$\Delta v = a\Delta y + b\Delta x + \rho_1 \Delta y + \rho_2 \Delta x$$

注意到$\lim\limits_{\Delta z\to 0} \rho(\Delta z) = 0$，则$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho_1 = 0$，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \rho_2 = 0$.这就意味着$u(x,y)$与$v(x,y)$可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$$

命题2推出命题1

证明

命题2⇒命题1：

遵循的类似的思路，我们把Δf用Δu，Δv表出，即

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

由于$u(x,y)$与$v(x,y)$均在点(x,y)处可微，则

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \rho_1\Delta x + \rho_2\Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \rho_3\Delta x + \rho_4\Delta y$$

其中$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \rho_i = 0 (i = 1,2,3,4)$.

命题2推出命题1

证明

那么

$$\Delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y$$
$$+ (\rho_1 + i\rho_3)\,\Delta x + (\rho_2 + i\rho_4)\,\Delta y$$

再代入Cauchy-Rieamann方程即得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\rho_1 + i\rho_3)\,\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\rho_2 + i\rho_4)\,\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

两端取极限就有$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$在$z = x + iy$处可导.

命题1推出命题3

证明

命题1⇒命题3：

若D是单连通域，则由闭路变形原理就可以将积分曲线变为围绕z的半径任意小的圆上(记为C)，对于多连通域，只要将内外边界曲线相连，将区域割破，也可化为单连通域用闭路变形原理处理，于是有

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_C \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi + \oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$$

前一个积分值就是$2\pi i f(z)$.对后一个积分，由$f(z)$连续有当C的半径任意小时，分子$f(\xi) - f(z)$的模可以任意小，不妨设为ε.

命题1推出命题3

证明

由积分估值定理

$$\left|\oint_C \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi\right| \leqslant \oint_C \frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\xi - z|}ds = 2\pi\varepsilon$$

上式表明第二个积分的模值可以任意小，而闭路变形原理要求该积分值与小圆半径无关，因此该积分值为0，即有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

命题3推出命题4

证明

命题3⇒命题4：

由命题3有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

对D内任意给定的z_0，我们记d为z_0到边界∂D的最短距离，则有$|\xi - z_0| \geqslant d$，令z在$|z - z_0| < d$内取值，则$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$成立，于是

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\xi - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

命题3推出命题4

证明

代入Cauchy积分公式就有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi$$

由于$\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$在∂D上是连续的，则由连续函数的性质有$\forall \xi \in \partial D$，$\exists M > 0$

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \right| < M$$

又考虑到$\left| \frac{z-z_0}{\xi-z_0} \right| < 1$，不妨设$\left| \frac{z-z_0}{\xi-z_0} \right| \leqslant 1 - \alpha$，其中$\alpha > 0$

命题3推出命题4

证明

那么对于该级数的通项就有

$$\left|\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n\right| < M(1-\alpha)^n$$

不等式右边是一个收敛的等比级数，于是由M准则知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$ 一致收敛，那么交换积分和求和的顺序有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi\right)(z - z_0)^n$$

这就表示$f(z)$在$z = z_0$有幂级数表示.

命题4推出命题1

证明

命题4⇒命题1：

设$f(z)$在任意一点$z = z_0$有幂级数表达式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, |z - z_0| < r$$

那么由幂级数的性质立刻就得到其和函数$f(z)$在z_0的收敛圆盘内解析.考虑到上述z_0的任意性即得$f(z) \in A(D)$.

问题

问题

证明以下一致收敛的复变函数项级数的性质.

1. 设E是集合，若$f_n(z) \in C(E)\,(n \in N^*)$且级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$一致收敛到$f(z)$，则$f(z) \in C(E)$.
2. 设C是简单曲线，若$f_n(z) \in C(C)\,(n \in N^*)$且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$一致收敛到$f(z)$，则$f(z)$在$C$上可积并有$\int_C f(z)dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz$.
3. 设D是区域，若$f_n(z) \in A(D)\,(n \in N^*)$且$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$一致收敛到$f(z)$，则$f(z)$在$D$内解析并有$f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$.

连续性的证明

证明

记该级数的部分和序列为$S_n(z)$，则由$f_n(z)$在E上连续有$S_n(z)$连续，那么任意取定$z_0 \in E$，则对$\forall z \in E$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$|z - z_0| < \delta$，有

$$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

又$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$一致收敛到$f(z)$，则$\exists N_1, N_2 > 0$，当$n > \max\{N_1, N_2\}$时有

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, |S_n(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

连续性的证明

证明

那么当$z \in U^*(z_0, \delta) \cap E$ 由复数的三角不等式

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z) - f(z)| + |S_n(z_0) - f(z_0)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

这就意味着$f(z)$在$z = z_0$处连续，考虑到z_0的任意性有$f(z)$在E上连续.

可积性的证明

证明

由前述定理知$f(z)$在C上连续，则$f(z)$在C上可积. 又$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$一致收敛到$f(z)$，则$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n > N$时有

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L}$$

其中L是该简单曲线的长度.那么当$n > N$时，有

$$\left| \int_C S_n(z)dz - \int_C f(z)dz \right| = \left| \int_C [S_n(z) - f(z)]dz \right|$$
$$\leqslant |S_n(z) - f(z)| \int_C ds < \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon$$

可积性的证明

证明

这就是

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C \sum_{k=0}^{n} f_k(z)dz$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_C f_k(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz$$

可微性的证明

证明

先证明$f(z)$连续.事实上，考虑到$f_n(z)$在区域内解析，则必连续，由定理1（连续性）可以知道$f(z)$在区域内连续.又由定理2（可积性）与Cauchy积分定理有，对于D内任意一条简单闭曲线C，

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz = 0$$

由Morera定理就有$f(z) \in A(D)$.

可微性的证明

证明

由解析函数的导数公式有

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

这里的C为围绕z的一个D内的圆周.又由于$\frac{1}{(\xi-z)^2}$在D内是连续的，那么由闭集上连续函数的性质有$\exists M > 0$

$$\left| \frac{1}{(\xi - z)^2} \right| < M$$

可微性的证明

证明

再考察级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi-z)^2}$ 的部分和 $\frac{S_n(\xi)}{(\xi-z)^2}$. 由 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 一致收敛到$f(z)$有$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N(\varepsilon) > 0$，当$n > N$时，对$\forall\xi \in C$有

$$|S_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

则

$$\left|\frac{S_n(\xi)}{(\xi - z)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\right| < |S_n(\xi) - f(\xi)| \left|\frac{1}{(\xi - z)^2}\right|$$
$$= \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

可微性的证明

证明

这就意味着 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(\xi)}{(\xi-z)^2}$ 一致收敛于 $\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}$.那么交换导数公式中积分与求和号的顺序，考虑到$f_n(z)$的导数公式有

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f_n(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}f_n'(z)$$